
This is a reprint from
Revista de la Academia Colombiana de Ciencias
Vol. 28 (106) (2004), 57-70

LA NOTACIÓN DIAGRAMÁTICA DE C. S. PEIRCE PARA LOS CONECTIVOS PROPOSICIONALES BINARIOS

por

Arnold Oostra

LA NOTACIÓN DIAGRAMÁTICA DE C. S. PEIRCE PARA LOS CONECTIVOS PROPOSICIONALES BINARIOS

por

Arnold Oostra¹

Dedicado al maestro Jairo Charris

Resumen

Arnold Oostra: La notación diagramática de C. S. Peirce para los conectivos proposicionales binarios. Rev. Acad. Colomb. Cienc. **28** (106): 57–70, 2004. ISSN 0370-3908.

Una de las notaciones más geniales para los conectivos proposicionales binarios fue introducida hace un siglo por C. S. Peirce. En esta notación, el símbolo asignado a cada conectivo puede leerse como la tabla de verdad del mismo y simultáneamente como el diagrama de Venn de la operación conjuntista correspondiente. Además de varias propiedades individuales y de múltiples relaciones, las simetrías del sistema completo de los conectivos proposicionales se reflejan de manera visual en los signos propuestos por Peirce.

Palabras clave: C. S. Peirce, conectivo proposicional, diagrama, tautología, simetría, automorfismo.

Abstract

One of the most brilliant notations for the binary propositional connectives was introduced a century ago by C. S. Peirce. In this notation, the symbol assigned to each connective can be read as its truth table and simultaneously as the Venn diagram of the corresponding set operation. Besides several individual properties and numerous relations, the symmetries of the complete system of connectives are visually reflected in the signs proposed by Peirce.

Key words: C. S. Peirce, propositional connective, diagram, tautology, symmetry, automorphism.

¹Profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad del Tolima. Becario de la Fundación Mazda para el Arte y la Ciencia. email: oostra@bunde.tolinet.com.co

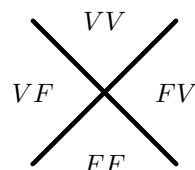
2000 Mathematics Subject Classification: 03A05, 00A30, 03B10.

Es bien sabido que en el cálculo proposicional clásico todos los conectivos pueden obtenerse como combinación de unos pocos, por ejemplo de la negación y la conjunción. Esto quizás explica por qué se acostumbra presentar y asignar símbolos a solo 4 o 5 de los 16 conectivos binarios clásicos y justifica la despreocupación generalizada por estudiar y diseñar notaciones para todos ellos. Siendo símbolos fundamentales en la lógica, un cambio hacia una notación adecuada podría compararse con el cambio de la notación romana para los números enteros a la arábica [8]. Sin embargo, a lo largo del siglo XX fueron propuestas numerosas notaciones para los conectivos binarios [20] que pueden clasificarse, de manera algo burda, en las *alfabéticas* que emplean letras usuales –como la polaca– y las *diagramáticas* que representan cada conectivo mediante un dibujo que procura sintetizar la definición del mismo. Quizás lo única notación que combina de manera armoniosa estas dos cualidades es la propuesta por Shea Zellweger [1, 17, 18, 19, 20, 21].

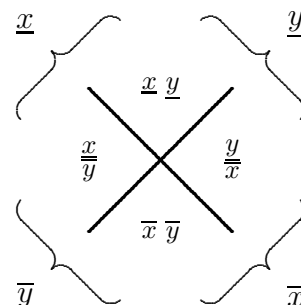
El lógico norteamericano Charles S. Peirce presentó por lo menos dos notaciones diferentes para los conectivos proposicionales binarios. Peirce ha sido destacado como uno de los intelectuales más originales y versátiles de América: entre otras ciencias, realizó aportes significativos a la química, la física, la geodesia, la filología, las matemáticas, la lógica matemática, la filosofía – de estas dos últimas puede decirse que fueron transformadas por las ideas del pensador. Por muy diversas razones Peirce nunca tuvo una posición estable en alguna Universidad, lo cual con seguridad aumentó el volumen de sus manuscritos pero mermó su influencia y el número de sus publicaciones. De hecho, C. S. Peirce ha pasado prácticamente desapercibido y solo en las últimas décadas del siglo XX ha tomado impulso el esfuerzo por estudiar, interpretar y aplicar sus ideas². La notación para los conectivos que Peirce más utilizó y que –por razones explicitadas en este trabajo– puede considerarse una de las mejores notaciones diagramáticas, fue elaborada hacia 1902 pues aparece en manuscritos con fechas de enero de ese año [2].

La idea de Peirce es sencilla en extremo: la tabla de verdad que define un conectivo binario tiene cuatro renglones, cada uno de los cuales puede ser V o F ; el símbolo \times tiene cuatro cuadrantes, cada uno de los

cuales puede dejarse abierto o bien cerrarse uniendo los extremos correspondientes. Se conviene cerrar los cuadrantes correspondientes a F y se adoptan los siguientes rótulos para los cuadrantes.



La idea de encerrar un espacio para indicar negación también se manifiesta en los gráficos existenciales de Peirce, donde un corte –una curva cerrada simple– se interpreta como la negación de su contenido (CP 4.402³, véase también [14, 22]). Por otra parte, un primer argumento para justificar su elección de los cuadrantes lo presenta Peirce en el diagrama siguiente, incluido en CP 4.260. En este dibujo \bar{x} denota la negación de x y \underline{x} su afirmación – Peirce sustenta de manera detallada la notación \bar{x} en CP 4.259 y ella se adopta en lo sucesivo en este documento.



La tabla 1 contiene la lista de los conectivos con sus signos respectivos. Peirce también propuso y empleó variantes cursivas de estos símbolos, sustentando con solidez los cambios introducidos en un pasaje precioso excluido de *Collected Papers* pero editado en una nota al pie en NEM 3.272⁴: en unos casos, se trata de signos más fáciles de escribir; en otros, algún antecesor respetable había introducido un símbolo más apropiado; en el caso del conectivo $=$, “a causa del sistema a veces daremos al signo la forma $x \infty y$ ”.

²Para mayor información véase [4, 5, 6, 7, 13, 15, 16] además de las referencias bibliográficas indicadas en estos documentos.

³Esto es: Parágrafo 402 del volumen 4 del texto *Collected Papers of Charles Sanders Peirce* [10].

⁴Esto es: Página 272 del volumen 3 de *The New Elements of Mathematics* [11].

VV	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V
VF	F	F	F	V	F	V	F	F	V	V	F	V	F	V	V	V
FV	F	F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
FF	F	V	F	F	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V	F	V
	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
	\diamond	\wedge	$<$	$>$	\vee	\triangleleft	\triangleright	∞	∞	∇	∇	\bowtie	∞	∞	\wp	\times
								$=$	\parallel							

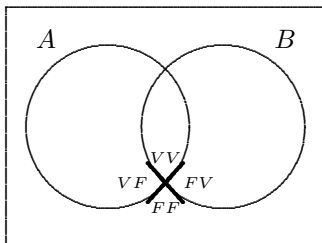
Tabla 1. Notación de Peirce para los conectivos binarios (1902).

En las secciones que siguen se muestra cómo la notación de Peirce refleja con fidelidad muchas propiedades de los conectivos, características que pueden clasificarse en tres *niveles de representación*.

1. Traducción

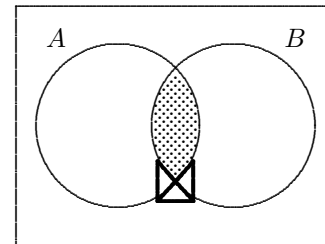
En la notación de Peirce, el signo del conectivo es la tabla de verdad del mismo. Para la traducción solo se requiere una convención sencilla: rotular los cuadrantes y cerrar los F . Esta traducción de signos a tablas de verdad se usa de manera iterada en el estudio de las propiedades de los conectivos (sección 2).

Pero en la notación de Peirce el signo del conectivo también es el diagrama de Venn de la operación conjuntista correspondiente. Si las proposiciones A y B se representan mediante circunferencias secantes, las cuatro regiones resultantes se rotulan –de manera natural– como sigue: la interior a ambas circunferencias es VV ; la interior a A y exterior a B es VF ; la exterior a A e interior a B es FV ; la exterior a ambas es FF . Si los centros de las circunferencias están a la misma altura como el de A a la izquierda y el de B a la derecha, entonces en el punto de corte *inferior* aparece la convención para los signos propuestos por Peirce.



Cabe anotar que Peirce mismo presentó este diagrama como un segundo argumento para justificar su elección de los cuadrantes, en el documento aún inédito *A Proposed Logical Notation* escrito alrededor de 1904.

Con esta convención, la traducción al diagrama de Venn es inmediata: el signo del conectivo se coloca en la intersección *inferior* y entonces las regiones sombreadas corresponden a los cuadrantes *abiertos* del signo. Por ejemplo, el siguiente es el paso del conectivo conjunción a la operación de intersección.



Todo parece indicar que Peirce empleó esta representación diagramática para calcular la tabla de soluciones de la quinta forma tautológica (apartado 2.5).

Las convenciones empleadas en la construcción de los dieciséis signos y en su traducción –a las tablas de verdad y a los diagramas de Venn–, además de muy sencillas, son *universales* en el sentido de que se emplea la misma clave de manera homogénea para representar la totalidad de los conectivos.

2. Propiedades y relaciones de los conectivos

En un artículo publicado en 1880, Christine Ladd-Franklin indicó que “hay una gran ventaja en que cada símbolo tenga una forma tal que su opuesto pueda indicarse volteándolo efectivamente, como el símbolo del Sr. Peirce para la implicación” (citado en [20]). A su vez, en el pasaje editado como nota en NEM 3.272 Peirce escribe: “Debe mencionarse (...) que parte de la propuesta [de la Sra. Franklin] era que cuando la relación significada era simétrica, el signo debería tener una simetría derecha e izquierda”. De esta manera, se busca que algunas propiedades del objeto –por ejemplo, el carácter conmutativo del conectivo– se reflejen en propiedades del signo –la simetría en el eje vertical–. De hecho, en

la notación de Peirce muchas propiedades de los conectivos se manifiestan en los signos y muchas relaciones entre los conectivos se traducen en relaciones entre los signos.

Recuérdese que dos fórmulas proposicionales α, β son *equivalentes* si la fórmula $(\alpha \bowtie \beta)$ es una tautología, esto es, resulta V para cualesquier valores de verdad asignados a las proposiciones atómicas que componen a α y a β .

Siendo O un conectivo cualquiera, ¿cuál es su “opuesto”? En otras palabras, ¿cuándo la fórmula $x O y$ es equivalente a $y \diamond x$, siendo O y \diamond conectivos? Al intercambiar las proposiciones x e y , los valores asignados a VV y FF no cambian, mientras los asignados a VF y FV se intercambian. Así, una respuesta a la segunda pregunta es: cuando el valor asignado por O a VF es el mismo asignado por \diamond a FV , y el valor asignado por O a FV es el mismo asignado por \diamond a VF . En la notación de Peirce esto se expresa como sigue: el cuadrante izquierdo de O coincide con el derecho de \diamond y el derecho de O con el izquierdo de \diamond .

Teorema. *Las expresiones $x O y$, $y \diamond x$ son equivalentes si y solo si \diamond se obtiene de O por reflexión en el eje vertical.*

En particular, un conectivo O es conmutativo –esto es, $x O y$, $y O x$ son equivalentes– si y solo si O es invariante bajo la reflexión en el eje vertical, o lo que es lo mismo, si O “tiene simetría derecha e izquierda”.

De manera similar puede derivarse la siguiente generalización de las conocidas identidades de De Morgan. Aquí *complementación* indica abrir los cuadrantes cerrados y cerrar los abiertos.

Teorema. *Las expresiones $\overline{x O y}$, $\overline{x} \diamond \overline{y}$ son equivalentes si y solo si \diamond se obtiene de O por rotación de 180 grados y complementación.*

Aunque el argumento es un poco más elaborado, también puede probarse de esta manera –diagramática– que \bowtie y \times son los únicos conectivos binarios *completos* en el sentido de que todo conectivo puede expresarse como combinación de cualquiera de ellos [5].

La búsqueda de tautologías. El objetivo primordial perseguido por Peirce al introducir los signos para los conectivos fue la búsqueda sistemática de tautologías, indagación en la cual las características de los signos juegan un papel decisivo. El procedimiento empleado por Peirce al buscar tautologías es el siguiente. Inicialmente

escogía una *forma*, una expresión de lógica proposicional en la cual no solo las proposiciones sino también los conectivos son incógnitas; luego, empleando propiedades de su notación, establecía todas –o muchas de– las *sustituciones* de los conectivos que hicieran una tautología de la forma.

Además de sus variantes, las formas estudiadas por Peirce son las siguientes [2].

$$\begin{aligned} & x O x \\ & x \diamond (x O x) \\ & (x \diamond x) O (x \heartsuit x) \\ & (x \diamond y) O (x \heartsuit y) \\ & (x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x O z)] \end{aligned}$$

Aquí $O, \diamond, \heartsuit, \spadesuit$ y \clubsuit son *variables* y en cada forma se buscan los conectivos tales que la expresión es verdadera para *cualquier* proposiciones x, y, z . Nótese que cada forma establece una relación –binaria, ternaria, ... – entre los conectivos.

En el análisis de estas formas Peirce consignó sus soluciones en tres tablas que –aun bajo una mirada muy superficial– presentan una simetría muy notable, simetría debida a los signos empleados. A continuación se presenta de manera sucinta el estudio de las cinco formas.

2.1. Primera forma. La expresión $x O x$ corresponde a un conectivo de aridad 1 luego tiene solo cuatro opciones: constante V (tautología), constante F , x , \overline{x} . Para obtener el primero se requiere que el conectivo O asigne V a las parejas VV, FF –las únicas que pueden intervenir–, lo cual en la notación de Peirce equivale a que los cuadrantes superior e inferior estén abiertos. Así, los conectivos O que hacen de esta expresión una tautología son $\bowtie, \times, \times, \times$. De igual manera se analizan los otros tres valores posibles de $x O x$, forma que induce una *clasificación* de los conectivos binarios mostrada en la tabla 2. Esta es una adaptación de la tabla elaborada por Peirce, la tabla original se presenta en el apéndice (tabla 11).

Los rótulos de las cuatro clases fueron propuestos por Peirce en CP 4.270. Si $O \in \mathcal{N}$ entonces $x O x$ es una tautología; si $O \in \mathcal{E}$, la forma equivale a \overline{x} ; si $O \in \mathcal{W}$ entonces $x O x$ es x ; y si $O \in \mathcal{S}$, es siempre F . La ubicación de las cuatro clases en una gran \times es coherente con la convención para cada signo: en el cuadrante superior siempre V , en el inferior siempre F , etcétera. A su vez,

la asignación de letras a las clases es coherente con la orientación usual de los mapas terrestres. Una versión de la tabla 2 aparece en CP 4.268, pero por desgracia los editores en vez de reproducir los signos introducidos por Peirce los sustituyeron por “un simbolismo más convencional”.

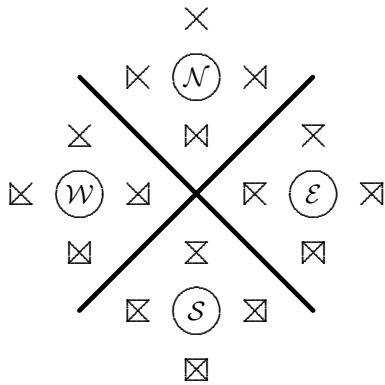


Tabla 2. Clasificación de los conectivos según la forma $x O x$.

2.2. Segunda forma. El análisis de la expresión $x \diamond (x O x)$ es sencilla en la medida en que contiene la forma $x O x$, estudiada de manera exhaustiva en el apartado 2.1. Por ejemplo si $O \in \mathcal{N}$ entonces $x O x$ es una tautología, de manera que la segunda forma se reduce a $x \diamond V$; para que esta forma sea tautología, basta que \diamond asigne V a los valores VV y FV –los únicos posibles–; en la notación de Peirce, esto equivale a que los cuadrantes superior y derecho estén abiertos. De esta manera, las parejas (\diamond, O) que arrojan una tautología de la segunda forma con $O \in \mathcal{N}$ son (\boxtimes, O) , (\boxtimes, O) , (\boxtimes, O) y (\times, O) .

O	\mathcal{N}	\mathcal{E}	\mathcal{W}	\mathcal{S}
\diamond	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes

Tabla 3. Tautologías de la forma $x \diamond (x O x)$.

De la misma manera se analizan las otras tres elecciones posibles de O . La pequeña tabla 3 contiene los resultados, para su elaboración se adoptó la técnica empleada por Peirce: en cada caso, se escoge el conectivo con más cuadrantes cerrados que haga tautología la expresión estudiada. Por ejemplo, para $O \in \mathcal{N}$ se escoge \boxtimes . Todas las demás soluciones se obtienen abriendo uno por uno los cuadrantes cerrados del conectivo elegido, en todas las formas posibles. En el ejemplo, se

consigna \boxtimes y las soluciones posibles son \boxtimes , \boxtimes , \boxtimes , \times .

2.3. Tercera forma. Como antes, el estudio de la expresión $(x \diamond x) O (x \heartsuit x)$ se basa en la clasificación inducida por la forma $x O x$. Si $\diamond \in \mathcal{N}$ y $\heartsuit \in \mathcal{N}$, la forma se reduce a $V O V$ que es tautología si O asigna V a la pareja VV , es decir, si su cuadrante superior está abierto. De esta manera, las ternas $(\diamond, O, \heartsuit)$ con $\diamond \in \mathcal{N}$, $\heartsuit \in \mathcal{N}$ que arrojan una tautología de esta forma son $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$, $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$, $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$, $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$, $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$, $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$, $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$ y $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$. Como otro ejemplo, si $\diamond \in \mathcal{N}$ y $\heartsuit \in \mathcal{W}$ entonces la forma se reduce a $V O x$ que es tautología si O asigna V a las parejas VV y VF , es decir, si están abiertos sus cuadrantes superior e izquierdo. Las ternas $(\diamond, O, \heartsuit)$ con $\diamond \in \mathcal{N}$, $\heartsuit \in \mathcal{W}$ que arrojan una tautología de esta forma son $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$, $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$, $(\diamond, \boxtimes, \heartsuit)$ y $(\diamond, \times, \heartsuit)$.

De esta manera pueden estudiarse los dieciséis casos posibles. Hasta donde se sabe, ni Peirce ni otros investigadores han consignado los resultados para esta forma en una tabla, pero es sencillo hacerlo con la técnica de Peirce indicada en el apartado 2.2: en el primer ejemplo se consigna \boxtimes y las soluciones posibles son \boxtimes , \boxtimes , \boxtimes , \boxtimes , \boxtimes , \boxtimes , \boxtimes , \boxtimes , \times ; en el segundo ejemplo se registra \boxtimes y las soluciones posibles son \boxtimes , \boxtimes , \boxtimes , \times .

La tabla 4 contiene todos los conectivos máximos. Si a la izquierda (conectivo \diamond) se escoge \mathcal{N} y a la derecha (conectivo \heartsuit) se toma \mathcal{N} , en la intersección de las filas correspondientes está \boxtimes ; en la intersección de las filas $\diamond = \mathcal{N}$ y $\heartsuit = \mathcal{W}$ está \boxtimes . Obsérvese la singular simetría especular que tiene esta tabla en los ejes vertical y horizontal, la misma simetría visible en el *Espejo Mágico* de M. C. Escher [3].

2.4. Cuarta forma. La expresión $(x \diamond y) O (x \heartsuit y)$ difiere sutilmente de la forma estudiada en el apartado 2.3. En vez de una variable proposicional ahora aparecen dos –lo cual hace disminuir el número de tautologías posibles– pero aparecen de manera ordenada –lo cual permite considerar simultáneamente las expresiones $x \diamond y$ y $x \heartsuit y$ –. La técnica empleada por Peirce para encontrar todas las tautologías de esta forma consiste en escoger libremente los conectivos \diamond y \heartsuit y, a partir de ellos, encontrar los conectivos O que hagan siempre verdadera la expresión analizada. Por ejemplo, si \diamond es \boxtimes y \heartsuit es \times entonces $x \diamond y$ siempre es F y $x \heartsuit y$ puede tomar los valores V y F , luego se requiere que O asigne V a las combinaciones FV y FF o, lo que es lo mismo, que sus cuadrantes derecho e inferior estén abiertos: en

este caso, las soluciones posibles para O son \boxtimes , \boxtimes , \boxtimes , \boxtimes . Si \diamond es \boxtimes y \heartsuit es \boxtimes entonces $x \diamond y$ toma los valores F, F, F, V –en ese orden– mientras $x \heartsuit y$ toma los valores V, F, F, V ; la forma $(x \diamond y) O (x \heartsuit y)$ se reduce a las cuatro posibilidades $F O V, F O F, F O F, V O V$; para obtener una tautología se requiere que O asigne V a las parejas FV, FF, VV , es decir, que sus cuadrantes superior, derecho e inferior estén abiertos; las soluciones posibles para O son \boxtimes y \boxtimes .

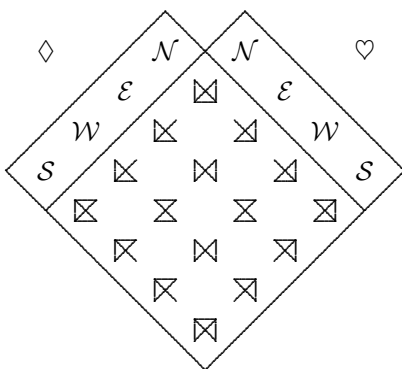


Tabla 4. Tautologías de la forma $(x \diamond x) O (x \heartsuit x)$.

Como en el apartado anterior, la tabla 5 contiene en cada casilla el conectivo O máximo que arroja una tautología de esta forma. En la intersección de las filas $\diamond = \boxtimes$ y $\heartsuit = \boxtimes$ está \boxtimes ; en la intersección de las filas $\diamond = \boxtimes$ y $\heartsuit = \boxtimes$ está \boxtimes .

Aunque aquí se presenta con otro orden para los conectivos, en esencia la tabla 5 se debe a Peirce –su versión original aparece en el apéndice, tabla 12–. Una versión horizontal (\square) de esta tabla aparece en CP 4.273, con la notación usada por los editores. De la tabla presentada allí, los editores dicen que “es una representación más clara (y precisa) de la tabla dada por Peirce, en razón de una reducción en el número de signos usados”. En el documento [9] se analiza la simetría de las tres tablas de Peirce con la ayuda de la teoría de grupos y, a partir de ese estudio, se refuta técnicamente la afirmación anterior: la razón esencial es que el grupo D_4 de los movimientos rígidos del cuadrado no actúa de manera *natural* sobre los signos empleados por los editores de *Collected Papers*. Allí también se muestra que las tablas 4 y 5 tienen la misma simetría y que ésta se pierde al colocarlas de manera horizontal (\square), de suerte que fue un gran acierto de Peirce el colocar sus tres tablas inclinadas (\diamond).

2.5. Quinta forma. Es evidente que el estudio de la forma $(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x O z)]$ es más complejo que el de las formas anteriores, pues aumenta el número de variables proposicionales y el de conectivos. Para esta forma Peirce renuncia a encontrar *todas* las tautologías, como lo ha logrado en las formas anteriores, y se conforma con *algunas*. Por ejemplo, no considera las tautologías ‘triviales’ que se obtienen cuando el conectivo principal \heartsuit es \boxtimes .

La estrategia empleada por Peirce puede describirse como sigue. En primer lugar, se escogen los conectivos \heartsuit, \diamond de tal manera que la forma auxiliar $P \heartsuit (Q \diamond R)$ sea verdadera excepto para una sola combinación preestablecida de valores para P, Q, R . Luego se determinan los conectivos \spadesuit, \clubsuit, O de tal manera que las tres proposiciones $(x \spadesuit y), (y \clubsuit z), x O z$ no tomen los valores establecidos, con lo cual se garantiza que la expresión completa es una tautología.

Peirce escogió cuatro combinaciones y las rotuló con los conectivos $\boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes$. La razón para elegir estos signos es sencilla: en el primer caso los valores excluidos para $P-Q-R$ son $F-F-F$, que es con exactitud el único caso en el cual la implicación $(P \boxtimes Q) \boxtimes R$ es falsa. Con otras palabras, en el primer caso se están buscando aquellos conectivos \heartsuit, \diamond tales que la fórmula $P \heartsuit (Q \diamond R)$ es equivalente a $(P \boxtimes Q) \boxtimes R$. Los demás casos se obtienen al cambiar en la última expresión el conectivo \boxtimes por los otros tres indicados.

Si la combinación escogida es \boxtimes , los conectivos \heartsuit, \diamond pueden determinarse como sigue. Si $F \diamond F$ es F , se requiere que \heartsuit asigne F a la pareja FF y V a todas las demás, luego su único cuadrante cerrado es el inferior y $\heartsuit = \boxtimes$, mientras \diamond tiene cerrado su cuadrante inferior y para garantizar la unicidad se requiere que todos los demás estén abiertos de suerte que también $\diamond = \boxtimes$; en el otro caso, si $F \diamond F$ es V , el conectivo \heartsuit debe asignar F a la pareja FV y V a todas las demás, luego $\heartsuit = \boxtimes$, mientras \diamond tiene abierto su cuadrante inferior y cerrados los demás, $\diamond = \boxtimes$. Las parejas de soluciones posibles para los cuatro casos están consignados en la tabla 6.

pivote	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes	\boxtimes
$\heartsuit \diamond$	$\boxtimes \boxtimes$	$\boxtimes \boxtimes$	$\boxtimes \boxtimes$	$\boxtimes \boxtimes$
	$\boxtimes \boxtimes$	$\boxtimes \boxtimes$	$\boxtimes \boxtimes$	$\boxtimes \boxtimes$

Tabla 6. Conectivos \heartsuit, \diamond para la forma $(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x O z)]$.

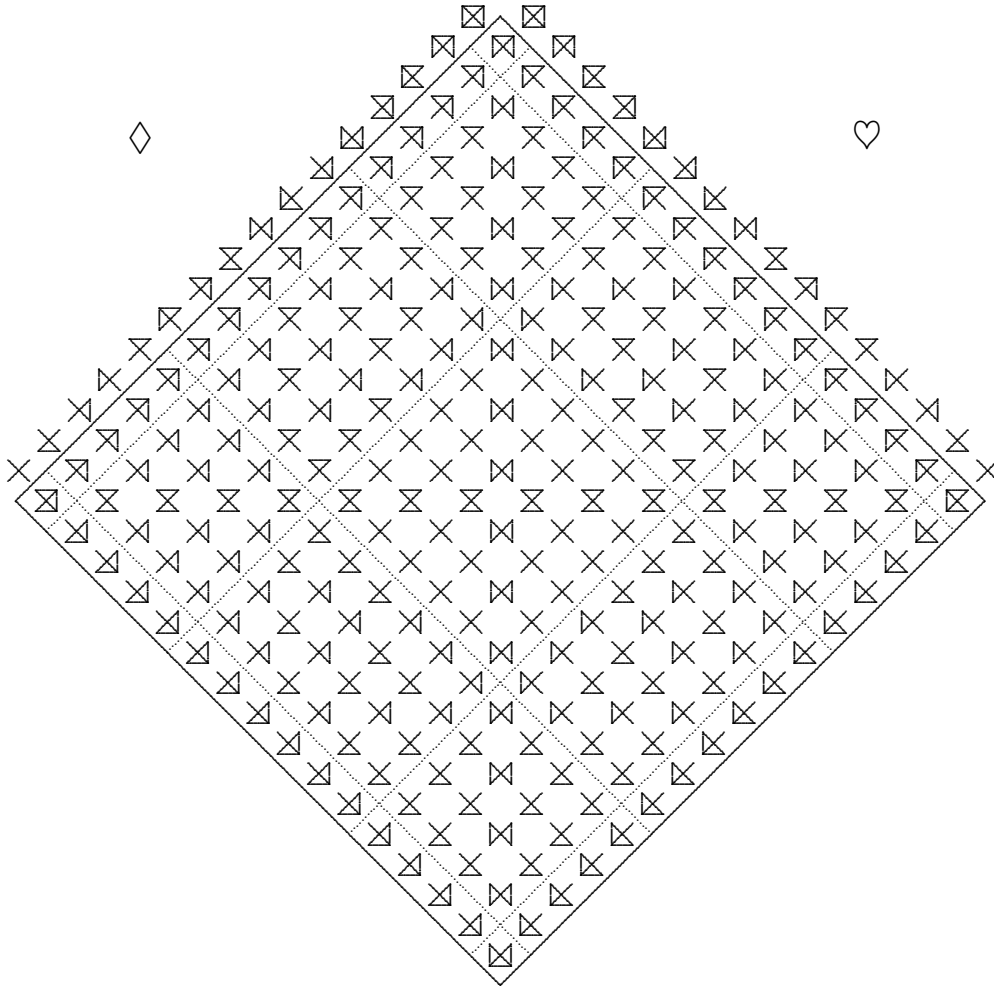


Tabla 5. Tautologías de la forma $(x \diamond y) \text{ O } (x \heartsuit y)$.

El cálculo de los conectivos \spadesuit , \clubsuit , O es más complejo aunque el procedimiento propuesto es el mismo seguido en las formas anteriores: se toman libremente dos conectivos \spadesuit , \clubsuit ; se buscan todos los conectivos O que satisfagan la condición exigida; se consigna el que tiene más cuadrantes cerrados; los demás se obtienen del máximo abriendo sus cuadrantes en todas las maneras posibles. En [2] y en [5] se indican métodos de cálculo del tercer conectivo en términos de los otros dos. Glenn Clark en [2] sostiene que Peirce no dejó indicación alguna sobre este cálculo, pero todo parece indicar que el pasaje CP 4.274 se refiere al mismo –en [5] se desarrollan algunos ejemplos que sostienen esta conjetura–. Los resultados de los 64 cálculos están consignados en la tabla 7. Obsérvese de nuevo la simetría especular en

el eje vertical, presente porque –siguiendo a Peirce– se tomaron órdenes distintos para las filas exteriores de la izquierda (\spadesuit) y de la derecha (\clubsuit). La tabla original de Peirce puede apreciarse en el apéndice (tabla 13). En [9] se demuestra que, con esta notación, solo hay *dos* presentaciones simétricas posibles, ambas con la tabla inclinada (\diamond). Por otra parte, aunque es un hecho de justificación fácil [5] no deja de ser asombroso que la misma tabla arroja las soluciones para *todos los cuatro* casos \boxtimes , \boxtimes , \boxtimes , \boxtimes .

Así, el procedimiento para encontrar tautologías de la quinta forma es el siguiente. En primer lugar se escoge un *pivote* del conjunto $\{\boxtimes, \boxtimes, \boxtimes, \boxtimes\}$. En segunda instancia y con la tabla 6, se toma cualquier pareja de

conectivos (\heartsuit, \diamondsuit) entre las dos asignadas al pivote elegido. Para los conectivos restantes se toman libremente dos conectivos \spadesuit, \clubsuit ; en la esquina superior de la tabla 7 se busca el pivote escogido; en las filas que se cortan en

el pivote se toma \spadesuit a la izquierda y \clubsuit a la derecha; al interior de la tabla, en el cruce de las filas correspondientes, se encuentra el conectivo máximo O que completa la tautología.

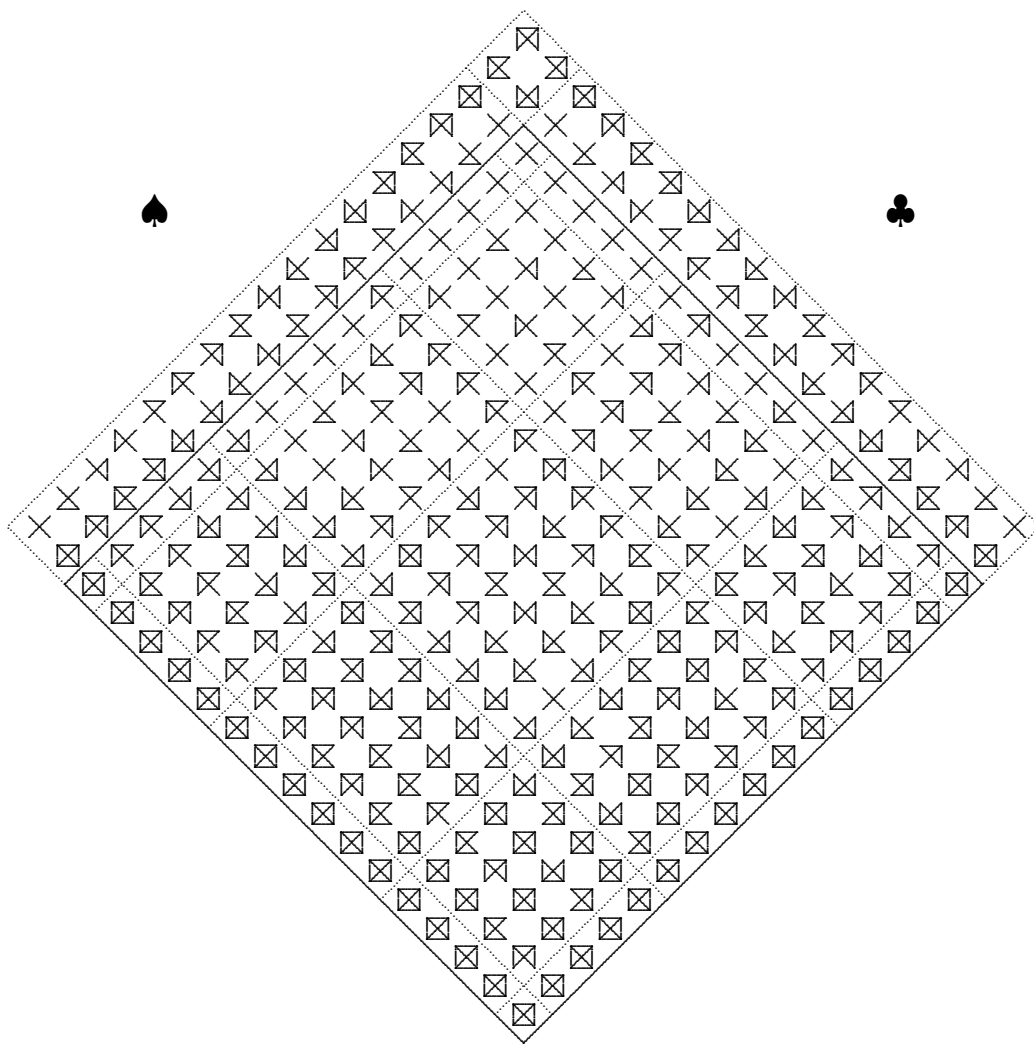


Tabla 7. Conectivos \spadesuit, \clubsuit, O para la forma $(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamondsuit (x O z)]$.

Por ejemplo, se escoge el pivote \boxtimes . De la tabla 6 se elige $(\heartsuit, \diamondsuit) = (\boxtimes, \boxtimes)$.

Se escogen $(\spadesuit, \clubsuit) = (\boxtimes, \boxtimes)$ y la tabla 7 indica – buscando $\spadesuit = \boxtimes$ y $\clubsuit = \boxtimes$ en las filas que se encuentran en \boxtimes arriba– que puede tomarse $O = \boxtimes$ o cualquier conectivo obtenido de él abriendo sus cuadrantes cerrados.

Luego

$$(x \boxtimes y) \boxtimes [(y \boxtimes z) \boxtimes (x \boxtimes z)]$$

es una tautología.

Peirce consideró las siguientes doce variantes de esta forma, que pueden atacarse con el mismo método. La tabla 7 sirve para todas las variantes pero la 6 debe volverse a calcular para cada forma [5].

$$\begin{aligned}
&(x \spadesuit y) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x \circ z)] \\
&(x \spadesuit y) \heartsuit [(x \circ z) \diamond (y \clubsuit z)] \\
&(y \clubsuit z) \heartsuit [(x \spadesuit y) \diamond (x \circ z)] \\
&(y \clubsuit z) \heartsuit [(x \circ z) \diamond (x \spadesuit y)] \\
&(x \circ z) \heartsuit [(x \spadesuit y) \diamond (y \clubsuit z)] \\
&(x \circ z) \heartsuit [(y \clubsuit z) \diamond (x \spadesuit y)] \\
\\
&[(x \spadesuit y) \diamond (y \clubsuit z)] \heartsuit (x \circ z) \\
&[(x \spadesuit y) \diamond (x \circ z)] \heartsuit (y \clubsuit z) \\
&[(y \clubsuit z) \diamond (x \spadesuit y)] \heartsuit (x \circ z) \\
&[(y \clubsuit z) \diamond (x \circ z)] \heartsuit (x \spadesuit y) \\
&[(x \circ z) \diamond (x \spadesuit y)] \heartsuit (y \clubsuit z) \\
&[(x \circ z) \diamond (y \clubsuit z)] \heartsuit (x \spadesuit y)
\end{aligned}$$

A la asombrosa tabla 7 está ligada una historia típica de los documentos de Peirce: en *Collected Papers* no aparece, pues se la confunde con la tabla 5; estuvo perdida durante muchos años en el inmenso legado manuscrito de Peirce; fue reubicada y comprendida apenas en las últimas décadas del siglo XX [2].

Conteo. A partir de las tablas presentadas no es difícil contar las tautologías encontradas por Peirce en las diferentes formas. De la tabla 2 es claro que la primera forma aporta 4 tautologías. En la tabla 3, cada uno de los conectivos consignados representa una familia de 4 soluciones; cada solución da lugar a 4 tautologías –pues O puede escogerse en un conjunto de tantos conectivos–; el total se duplica porque cada tautología de la forma

$x \diamond (x \circ x)$ aporta una de la forma variante $(x \circ x) \heartsuit x$ (¡reflejando el signo \diamond en su eje vertical!). Así, hay $4 \times 4 \times 4 \times 2 = 128$ tautologías de la segunda forma.

Como en la 3, en las tablas 4, 5 y 7 el conectivo que aparece en cierta casilla es el máximo del conjunto de soluciones: si tiene n cuadrantes cerrados, representa una familia de 2^n conectivos. En consecuencia, el número de tautologías aportadas por cada una de estas tablas es la suma $\sum 2^{n_i}$ donde i recorre todas las casillas de la tabla. Para la tercera forma la suma $\sum 2^{n_i}$ es 80, cantidad que debe multiplicarse por 16 –el número de posibles elecciones de la pareja (\diamond, \heartsuit) – lo cual arroja 1280 tautologías. En la tabla 5 se tiene $\sum 2^{n_i} = 680$; aunque Peirce no lo indicó, con esta misma tabla pueden encontrarse otras tantas tautologías de la forma alternativa $(x \diamond y) \circ (y \heartsuit x)$, aumentando la cuenta a 1360. La suma $\sum 2^{n_i}$ de la tabla 7 es 1699, cantidad que debe multiplicarse por la cantidad de pivotes, por la de opciones que da la tabla 6 y finalmente por el número de formas alternativas consideradas. Así, la cantidad de tautologías encontradas de la quinta forma asciende a $1699 \times 4 \times 2 \times 12 = 163104$. En CP 4.271 se indica un total de 24376, que debe ser $24576 = 256 \times 4 \times 2 \times 12$, producto obtenido al considerar solo una tautología por cada casilla de esta tabla en vez de 2^{n_i} .

El gran total de tautologías halladas en las diversas formas estudiadas por Peirce es $4 + 128 + 1280 + 1360 + 163104 = 165876$.

3. Propiedades del sistema

En la sección 2 se mostró cómo muchas propiedades de los conectivos se reflejan en el signo que les corresponde en la notación de Peirce. Además de las propiedades individuales de los conectivos y de las relaciones entre ellos –conmutatividad, tautología de una forma determinada– pueden distinguirse propiedades del sistema completo de los conectivos binarios.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
VV	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V
VF	F	F	F	V	F	V	F	F	V	V	F	V	F	V	V	V
FV	F	F	V	F	F	F	V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
FF	F	V	F	F	F	F	F	V	F	V	V	V	V	V	F	V

Tabla 8. El sistema de los conectivos binarios.

En la tabla 8 –donde los conectivos están rotulados con los números de 1 a 16– se reconocen varias simetrías, por ejemplo: la reflexión de la tabla en su eje vertical

corresponde a cambiar todas las letras V por F y viceversa. Conforme lo explicitó H. Weyl [12], la simetría de una estructura se estudia mediante el grupo de los automorfismos de la misma –de hecho, la teoría de grupos

es la herramienta precisa que la matemática desarrolló para estudiar la simetría–.

En el caso de los conectivos binarios, no es difícil encontrar *automorfismos lógicos*: la negación –asignar al conectivo O el conectivo \diamond tal que $x \diamond y$ y $\overline{x \text{ O } y}$ son equivalentes–, la negación en los argumentos, la conversión.

Todas las combinaciones de estas funciones básicas arrojan un total de 16 automorfismos. Puede justificarse que no hay más [4, 5], pero no parece nada fácil explicar por qué el número de automorfismos coincide con el de conectivos. La tabla 9 muestra de manera explícita las 16 funciones biyectivas, a la izquierda se indica su forma de cálculo.

$x \text{ O } y$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
$x \text{ O } y$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Reposo
$\overline{y} \text{ O } x$	1	3	5	2	4	10	6	9	8	11	7	13	15	12	14	16	Rotación 90°
$\overline{x} \text{ O } \overline{y}$	1	5	4	3	2	11	10	8	9	7	6	15	14	13	12	16	Rotación 180°
$y \text{ O } \overline{x}$	1	4	2	5	3	7	11	9	8	6	10	14	12	15	13	16	Rotación 270°
$y \text{ O } x$	1	2	4	3	5	7	6	8	9	11	10	12	14	13	15	16	Reflexión EV
$\overline{x} \text{ O } y$	1	4	5	2	3	11	7	9	8	10	6	14	15	12	13	16	Reflexión DA
$\overline{y} \text{ O } \overline{x}$	1	5	3	4	2	10	11	8	9	6	7	15	13	14	12	16	Reflexión EH
$x \text{ O } \overline{y}$	1	3	2	5	4	6	10	9	8	7	11	13	12	15	14	16	Reflexión DD
$\overline{x \text{ O } y}$	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	Complemento
$\overline{y \text{ O } x}$	16	14	12	15	13	7	11	8	9	6	10	4	2	5	3	1	Rot 90°+Co
$\overline{x \text{ O } \overline{y}}$	16	12	13	14	15	6	7	9	8	10	11	2	3	4	5	1	Rot 180°+Co
$\overline{y \text{ O } \overline{x}}$	16	13	15	12	14	10	6	8	9	11	7	3	5	2	4	1	Rot 270°+Co
$\overline{y \text{ O } x}$	16	15	13	14	12	10	11	9	8	6	7	5	3	4	2	1	Ref EV+Co
$\overline{x \text{ O } y}$	16	13	12	15	14	6	10	8	9	7	11	3	2	5	4	1	Ref DA+Co
$\overline{y \text{ O } \overline{x}}$	16	12	14	13	15	7	6	9	8	11	10	2	4	3	5	1	Ref EH+Co
$\overline{x \text{ O } \overline{y}}$	16	14	15	12	13	11	7	8	9	10	6	4	5	2	3	1	Ref DD+Co

Tabla 9. Efecto de los automorfismos lógicos.

Estos automorfismos con la composición constituyen un grupo. Se trata de un subgrupo no abeliano de S_{16} isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times D_4$: la última columna de la tabla 9 indica el isomorfismo. Aquí EV indica la reflexión en el eje vertical y EH en el horizontal, mientras DA indica la reflexión en la diagonal que asciende de izquierda a derecha y DD en la que descende de izquierda a derecha –llamada *diagonal principal* en teoría de matrices–. En lenguaje más sintético, los automorfismos corresponden a los movimientos rígidos de un cuadrado que puede cambiar entre dos estados –o dos colores–, cambio que en la tabla se ha descrito como “complemento”.

Todo (sub)grupo de automorfismos de una estructura *actúa* de manera natural sobre la estructura. En este caso, resulta interesante calcular las órbitas, los elementos invariantes y los subgrupos de isotropía de esta acción directamente de la tabla, como se hace con detalle en [4] y [5]. Allí también se calculan subgrupos y cocientes de este grupo.

Cuando se escribe la tabla 9 con la notación de Peirce, el resultado es sorprendente.

En la tabla 10 se observa de inmediato que los automorfismos lógicos corresponden *con toda exactitud* a los movimientos rígidos de los signos: el automorfismo identificado con la rotación corresponde a rotar cada signo 90 grados; cualquier automorfismo caracterizado como una reflexión corresponde a reflejar cada signo en el eje o diagonal del caso; el automorfismo de negación, identificado con el complemento, corresponde a abrir en cada signo los cuadrantes cerrados y cerrar los abiertos. El marco \times con el que se dibujan los signos originales es, sin duda, un cuadrado cuyos lados pueden alternar entre dos estados –cuadrante abierto y cuadrante cerrado– y sus movimientos rígidos corresponden, via un isomorfismo, a los automorfismos del sistema de los conectivos binarios. De esta manera, toda la simetría del sistema de conectivos se refleja en el sistema de signos propuesto por Peirce.

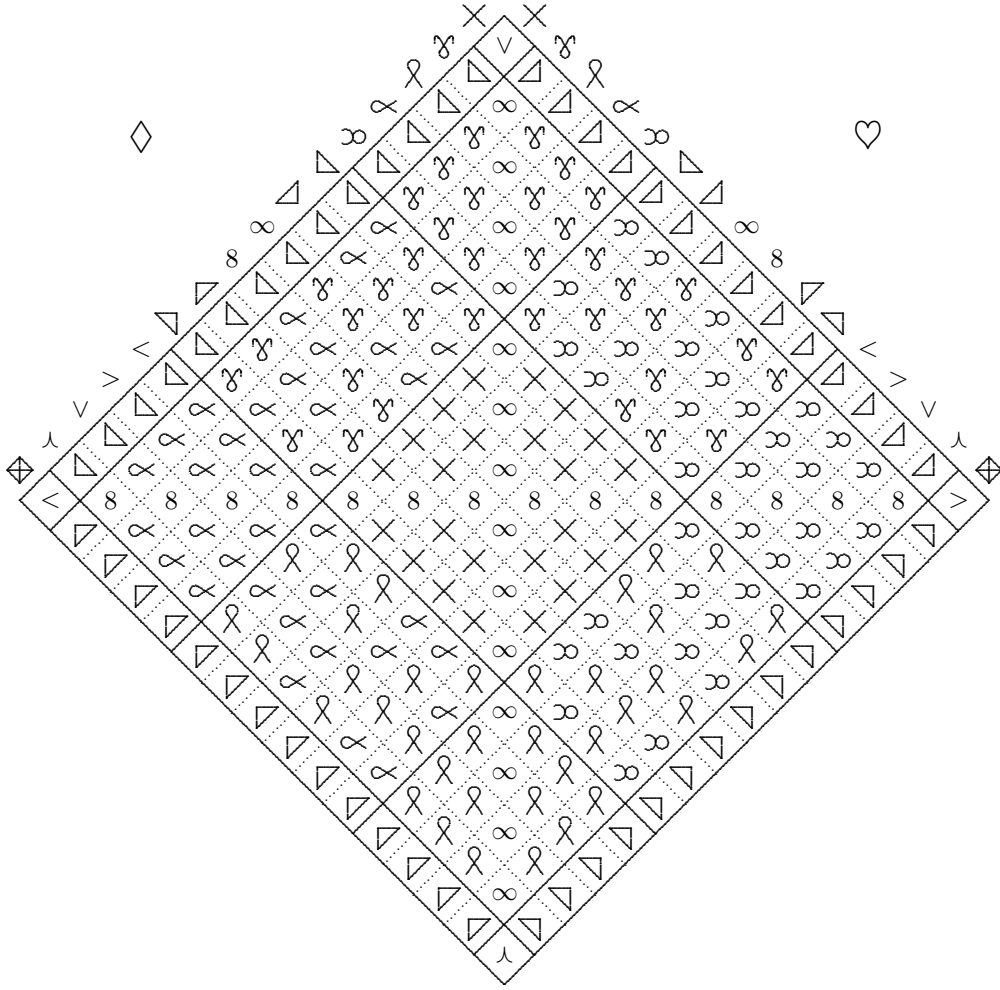


Tabla 12. Segunda tabla de Peirce: tautologías de la forma $(x \diamond y) \text{ O } (x \heartsuit y)$.

